Hoja de Problemas $9\frac{3}{4}$

Decidir de forma razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas

1. Un sistema de ecuaciones lineales con m ecuaciones y n incógnitas con $m > n$ siempre tiene solución.
2. Consideremos un sistema de m ecuaciones con n incógnitas

$$(*) \qquad A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

con A una matriz $m \times n$. Si $s_1 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ y $s_2 = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ son dos soluciones de (*), entonces $s_1 - s_2$ es solución del sistema homogéneo asociado:

$$(**) \qquad A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Sean $\mathcal{B}_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{u_1, u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_3\}$ dos bases del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $V = \mathbb{R}^3$. Entonces las coordenadas del vector $w_1 = u_1 - u_2 + u_3$ en la base $\mathcal{B}_2$ son $(2, -2, 1)$.
4. Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, y $\{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k\} \subset E$ un sistema de vectores linealmente independientes. Si v es un vector de E con $v \notin \langle v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}\rangle$, entonces existe un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $v = \lambda v_k$.
5. Para cualesquiera tres subespacios F, G y H de un espacio vectorial E se tiene que

$$F \cap (G + H) \supset (F \cap G) + (F \cap H)\,.$$

6. Sean $\mathcal{B}_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{u_1, u_1 - u_2, u_1 - u_2 - u_3\}$ dos bases del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $V = \mathbb{R}^3$. Entonces las coordenadas del vector $w_1 = 2u_1 + u_2 - u_3$ en la base $\mathcal{B}_2$ son $(3, -2, 1)$.
7. Si la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^5$ es sobreyectiva, entonces su núcleo tiene dimensión 1
8. Supongamos que $\{u, v\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$. Entonces $\{2u + v, u - 3v\}$ es también una base de $\mathbb{R}^2$.
9. Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n, y $F \subset E$ un subespacio vectorial de dimensión $n - 1$. Si $v_1, v_2 \in E$ son dos vectores con $v_1, v_2 \notin F$, entonces existe un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $v_1 = \lambda v_2$.
10. Para cualesquiera tres endomorfismos f, g y h de un espacio vectorial E se verifica que $\det(f \circ (g + h)) = \det(f \circ g) + \det(f \circ h)$.
11. Siempre que W_1 y W_2 sean dos subespacios vectoriales de un espacio vectorial V de dimensión finita, se ha de tener que $\dim(W_1 + W_2) \leq \dim(W_1) + \dim(W_2)$.
12. La aplicación $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida mediante $T(z) = \mathrm{Re}\,(z)$ (donde $\mathrm{Re}\,(z)$ denota la parte real de z) es $\mathbb{C}$-lineal.
13. La aplicación $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida mediante $T(z) = \mathrm{Im}\,(z)$ (donde $\mathrm{Im}\,(z)$ denota la parte imaginaria de z) es $\mathbb{R}$-lineal.

14. La aplicación $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida mediante $T(z) = (2+3i)\overline{z}$, es $\mathbb{C}$-lineal.
15. La aplicación $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida mediante $T(z) = (2+3i)\overline{z}$, es $\mathbb{R}$-lineal.
16. Si $f, g \colon V \to V$ son dos aplicaciones lineales, entonces $\operatorname{Im}(f+g) = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$.
17. Si en una matriz cuadrada reemplazamos la fila j por la fila j menos la fila i, el valor del determinante no cambia.
18. Si dos matrices cuadradas tienen la misma traza y el mismo determinante, entonces representan a la misma aplicación lineal, quizá con respecto a bases distintas.
19. Si $f, g \colon V \to V$ son dos aplicaciones lineales, entonces $\operatorname{Nuc}(f+g) = \operatorname{Nuc} f \cap \operatorname{Nuc} g$.
20. Existe una matriz 3×3 con cuatro autovalores complejos distintos.
21. En el espacio vectorial de todas las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, las funciones $\cos(t)$, $\operatorname{sen}(t)$, $\operatorname{sen}(2t)$ son linealmente independientes.
22. Si A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, entonces $\det(A+B) = \det A + \det B$.
23. Si A una matriz cuadrada de tamaño $n \geq 2$ con entradas en un cuerpo $\mathbb{K}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces $\det(\lambda A) = \lambda \det A$.
24. Sean A y B dos matrices cuadradas de igual tamaño $n \geq 2$ con entradas en el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Entonces, para cualquier elemento $\lambda \in \mathbb{K}$ se tiene $\det(\lambda AB) = \det(\lambda BA)$.
25. Toda aplicación $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que lleva $\mathbf{0}$ en $\mathbf{0}$ es lineal.
26. Si V, W son espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo y $f : V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal inyectiva, entonces $\dim V \leq \dim W$.
27. Si $f \colon V \to V$ es una aplicación lineal, entonces $\operatorname{Im} f + \operatorname{Nuc} f = V$.
28. Si $f, g \colon V \to V$ son dos aplicaciones lineales y $f \circ g = 0$, entonces $g \circ f = 0$.
29. Si $f \colon V \to V$ es una aplicación lineal y $\operatorname{Nuc} f = \operatorname{Nuc} f^2$, entonces $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$.
30. Todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo cardinal.
31. Todos los sistemas de ecuaciones lineales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ tienen infinitas soluciones no nulas si el número de ecuaciones es menor estrictamente que el número de variables.
32. Si $f : V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo, $\mathbb{K}$, y $f(v_1)$, $f(v_2)$ y $f(v_3)$ son vectores de W linealmente independientes, entonces v_1, v_2 y v_3 son vectores de V linealmente independientes.
33. Sea E un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$. Si $f : E \longrightarrow E$ es un endomorfismo inyectivo, los polinomios mínimo y característico de f tienen el mismo grado.